

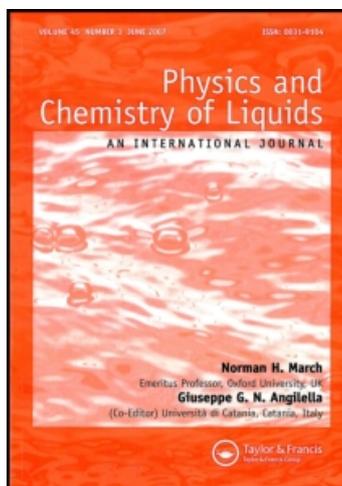
This article was downloaded by:

On: 28 January 2011

Access details: *Access Details: Free Access*

Publisher *Taylor & Francis*

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



Physics and Chemistry of Liquids

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713646857>

Modification de la surface libre d'une couche mince liquide isolante soumise à un flux de charges

G. Sabra^a; J. Fornazero^a; G. Mesnard^a

^a Université Claude Bernard de Lyon,

To cite this Article Sabra, G. , Fornazero, J. and Mesnard, G.(1976) 'Modification de la surface libre d'une couche mince liquide isolante soumise à un flux de charges', *Physics and Chemistry of Liquids*, 5: 4, 267 – 281

To link to this Article: DOI: 10.1080/00319107608084123

URL: <http://dx.doi.org/10.1080/00319107608084123>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Full terms and conditions of use: <http://www.informaworld.com/terms-and-conditions-of-access.pdf>

This article may be used for research, teaching and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, re-distribution, re-selling, loan or sub-licensing, systematic supply or distribution in any form to anyone is expressly forbidden.

The publisher does not give any warranty express or implied or make any representation that the contents will be complete or accurate or up to date. The accuracy of any instructions, formulae and drug doses should be independently verified with primary sources. The publisher shall not be liable for any loss, actions, claims, proceedings, demand or costs or damages whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with or arising out of the use of this material.

Modification de la Surface Libre d'une Couche Mince Liquide Isolante Soumise à un Flux de Charges

G. SABRA, J. FORNAZERO

et

G. MESNARD

Université Claude Bernard de Lyon

On établit d'abord l'équation aux dérivées partielles caractérisant la déformation de la couche soumise à une différence de potentiel uniforme. L'équation est résolue pour deux cas limites, celui des déformations de faible amplitude avec solution sinusoïdale et celui des déformations de forte amplitude avec déformation "cellulaire." On discute les résultats obtenus.

The partial differential equation characterizing the deformation of the layer submitted to a uniform potential difference is first obtained. The equation is solved for two limiting cases, one of which corresponds to deformations of small amplitude, the other to deformations of large amplitude, with respectively sinusoidal and "cellular" solutions. The results thus obtained are discussed.

1 INTRODUCTION

La déformation d'un liquide en présence de forces électrostatiques peut prendre des formes variées.¹ Dans une précédente publication nous avons envisagé deux cas particuliers et donné quelques résultats expérimentaux.² Nous allons préciser le comportement pour l'un d'entre eux. Il s'agit de la déformation "directe" obtenue par dépôt de charges à la surface d'une couche mince horizontale d'un liquide isolant déposé sur un substrat conducteur mis à la masse. Ce dépôt est effectué par exemple par décharge corona entre une pointe et le substrat métallique ou encore à l'aide d'un faisceau d'électrons ou d'ions.

Pour traiter théoriquement le problème, nous choisissons un axe Oz vertical dirigé vers le haut, l'origine des axes étant au niveau de la surface

du substrat. L'épaisseur du liquide au repos étant h , on se propose de calculer l'équation de la surface libre $z = z(x, y)$, en supposant le film liquide pratiquement indéfini. Soit σ la densité de charge (sur les surfaces de liquide) et V le potentiel de la surface; à une aire élémentaire $dx dy$ correspond une énergie électrostatique $\frac{1}{2}V\sigma dx dy$. Nous prenons en compte d'autre part l'énergie de surface $A dS$, où A est la constante de tension superficielle et dS l'étendue de la surface libre correspondant à l'aire $dx dy$, car les phénomènes de surface vont jouer un rôle essentiel; éventuellement on pourra ajouter l'énergie due à la pesanteur, dont le rôle est faible. Nous négligerons le courant à travers la couche, qui se comporte en gros comme un condensateur; en fait, dans les expériences réalisées, on opère en régime permanent, les charges qui s'écoulent étant exactement remplacées au fur et à mesure par les charges qui arrivent; et la tension V est créée par le passage en courant.

En supposant les évolutions isothermes, l'énergie libre associée à l'aire $dx dy$ est $AdS + \frac{1}{2}V\sigma dx dy$. Pour une évolution à charge constante, l'équilibre correspond au minimum de cette énergie libre pour l'ensemble de la couche. On peut aussi raisonner sur des évolutions à potentiel constant (le résultat sera le même); l'équilibre correspond alors au minimum de l'enthalpie libre, obtenue en retranchant $V\sigma dx dy$, soit $AdS - \frac{1}{2}V\sigma dx dy$. Il faut donc minimiser $\iint (AdS - \frac{1}{2}V\sigma dx dy)$, avec la contrainte $\iint z dx dy = c^e$, qui exprime que le volume du liquide, supposé incompressible, est fixé.

Or on a $dS = dx dy \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$, z_x' et z_y' étant les dérivées partielles de la fonction z . Lorsque la normale à la surface s'écarte assez peu de la verticale, on peut en première approximation remplacer $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$ par

$$1 + \frac{z_x'^2 + z_y'^2}{2}.$$

Par ailleurs, dans les mêmes conditions, on peut prendre

$$\sigma = \frac{\epsilon V}{z},$$

ϵ étant la constante diélectrique. Finalement, on doit minimiser

$$\iint \left[A \left(1 + \frac{z_x'^2 + z_y'^2}{2} \right) - \frac{\epsilon V^2}{2z} \right] dx dy.$$

2 EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES DU PROBLEME

On sait que le minimum de

$$\iint I_1(z, x, y, z_x', z_y') dx dy$$

avec la contrainte

$$\iint I_1(z, x, y, z'_x, z'_y) dx dy = c^{te}$$

est déterminé par l'équation d'Euler-Lagrange correspondant à la fonction $I = I_1 - \mu I_2$, où μ est le multiplicateur de Lagrange,

$$\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z'_x} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial I}{\partial z'_y} \right) = 0.$$

On en déduit l'équation aux dérivées partielles du problème en notant que

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\epsilon V^2}{2z^2} - \mu, \quad \frac{\partial I}{\partial z'_x} = Az''_x \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial I}{\partial z'_x} \right) = Az''_x$$

On obtient

$$\frac{\epsilon V^2}{2z^2} - \mu = A\Delta z, \tag{1}$$

Δz étant le Laplacien.

$-A\Delta z$ est la pression capillaire P_C comptée positivement vers le bas, tandis que $\frac{\epsilon V^2}{2z^2}$ est la pression électrostatique P_E . La formule $P_E + P_C = \mu$ montre alors que μ représente l'écart entre la pression intérieure et la pression extérieure. Ceci rejoint le raisonnement antérieur² qui correspondait aux mêmes approximations. Si l'on introduit la gravitation, il faut ajouter $\frac{1}{2} \rho g z^2 dx dy$ dans l'énergie associée à l'aire $dx dy$, d'où, dans I , $\frac{1}{2} \rho g z^2$ et dans (1) $\rho g z$ à gauche, ce qui représente l'excédent de la pression du liquide sur le fond par rapport à la pression dans le liquide près de la surface libre; en définitive μ est alors l'écart entre les pressions sur le fond et dans l'atmosphère.

Revenons au cas de l'équation (1). On a

$$\Delta z = - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right),$$

R et R' étant les deux rayons de courbure principaux comptés positivement si la concavité est vers le bas. En un point où la courbure totale est nulle (point d'"inflexion"), Δz est nul et l'on a

$$\frac{\epsilon V_i^2}{2z_i^2} = \mu,$$

V_i et z_i étant les valeurs correspondantes de V et z , ce qui montre que le multiplicateur de Lagrange est égal à la pression électrostatique P_{E_i} en ce point. Quand on a trouvé la solution de (1) $z = z(x, y, \mu)$, on détermine μ

en écrivant que la moyenne de z est h . Si V est partout le même (avec en particulier $V_1 = V$), on voit que, pour $z > z_1$, Δz est < 0 et la concavité de la surface libre est tournée vers le haut; c'est l'inverse pour $z < z_1$.

Il pourra être avantageux, pour résoudre l'équation (1), de passer en coordonnées polaires; il suffit de remplacer Δz par

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \text{ ou } \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rz)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right).$$

3 CONSIDERATIONS PHYSIQUES

L'équation (1) s'écrit aussi bien

$$\frac{\sigma^2}{2\epsilon} - \mu = A \Delta z \quad (2)$$

La forme à choisir pour la résolution dépend des conditions physiques du problème. Si on a apporté initialement des charges avec une densité $\sigma(x, y)$, ces charges ne pouvant ensuite se déplacer lorsque la déformation s'établit, il est commode de raisonner sur l'équation (2) où $\sigma(x, y)$ est une fonction connue; l'équation à résoudre est une équation de Poisson pour z . On en tirera

$$V(x, y) = \frac{z}{\epsilon} \sigma(x, y).$$

Nous ne développerons pas davantage ce cas.

Il se peut au contraire, compte tenu des conditions expérimentales ou par suite de la mobilité des charges en surface, que le potentiel tende à s'uniformiser sur celle-ci. Nous raisonnons sur le cas idéal d'un potentiel V parfaitement uniforme. Si on connaît la charge totale

$$Q = \epsilon V \iint \frac{dx dy}{z} \quad (3)$$

la résolution de l'équation (1) donne la fonction $z(x, y, V)$; on en tire V en portant dans (3). Il faut noter que σ dépend alors de x et y .

En dehors de ce cas limite, s'il y a transport de charges il faut traiter le problème en introduisant aussi une équation traduisant les lois de la conduction. Le problème étant dynamique, il est bon alors de tenir compte également de la viscosité. La conductivité superficielle peut d'ailleurs être influencée par la nature et la pression de l'atmosphère qui surmonte le liquide. Notons aussi que, si la surface est étendue alors que les charges ont été apportées dans une zone limitée, le potentiel s'uniformisera rapidement dans cette zone, mais ne s'étendra au delà que progressivement. En définitive les propriétés de l'électrode qui est en contact avec la surface libre interviennent largement.

4 RESOLUTION DE L'EQUATION (1). DEFORMATIONS DE FAIBLE AMPLITUDE

Posons $z = z_1 + \zeta$ et supposons $|\zeta| \ll z_1$. L'équation

$$\frac{\epsilon V^2}{2z^2} - \frac{\epsilon V^2}{2z_1^2} = A \Delta z$$

donne alors, pour trouver ζ , l'équation approchée

$$-\frac{\epsilon V^2}{2z_1^2} \frac{2\zeta}{z_1} = A \Delta \zeta$$

ou

$$\zeta''_x + \zeta''_y + k^2 \zeta = 0 \quad (4)$$

avec

$$k^2 = \frac{\epsilon V^2}{A z_1^3}.$$

La forme des solutions dépend des conditions aux limites. Pour la préciser nous envisagerons deux cas particuliers.

1 Solutions de la forme $\zeta(x, y) = \xi(x) \times \eta(y)$

On a

$$\xi'' \eta + \xi \eta'' + k^2 \xi \eta = 0$$

ou

$$\frac{\xi''}{\xi} + \frac{\eta''}{\eta} + k^2 = 0,$$

ce qui conduit à

$$\frac{\xi''}{\xi} = -k_1^2, \quad \frac{\eta''}{\eta} = -k_2^2,$$

k_1 et k_2 étant soumis à la condition $k_1^2 + k_2^2 = k^2$. En prenant les solutions sous forme complexe, on a

$$\xi = c_1 e^{\pm i k_1 x}, \quad \eta = c_2 e^{\pm i k_2 y} \quad \text{et} \quad \zeta = c_1 c_2 e^{\pm i(k_1 x \pm k_2 y)}$$

Avec k_1 et k_2 réels, les solutions réelles sont sinusoïdales (ondes stationnaires). Le vecteur \mathbf{k} de composantes k_1 et k_2 est le vecteur d'onde, de longueur k . Il faut bien noter que z_1 est ici égal à h .

Dans le cas où z ne dépend pas de y (problème à une dimension), on a

$\zeta = ce^{z_1 k x}$. La longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \frac{z_1^{3/2}}{V},$$

c'est-à-dire, puisque $z_1 = h$,

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{Ah}{\epsilon}} \frac{h}{V}.$$

Elle diminue quand la tension V croît. Le cas de une dimension a déjà été évoqué en relation avec la "frost deformation" de matériaux thermoplastiques.³ On doit remarquer que les approximations faites correspondent à $c \ll h$ et d'autre part k doit être assez petit car l'angle maximal de la normale à la surface libre avec la verticale, dont la tangente vaut kc , doit être très inférieur à 1: $kc \ll 1$. Ceci entraîne que kh est très inférieur à 1 ou

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{Ah}} V \ll 1,$$

soit

$$V \ll \sqrt{\frac{Ah}{\epsilon}}$$

ou encore, pour la densité de charge moyenne,

$$\sigma \ll \sqrt{\frac{A\epsilon}{h}}.$$

2 Solutions de la forme $\zeta(r, \theta) = R(r)y(\theta)$

Le Laplacien s'écrit

$$\Delta \zeta = y \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + \frac{2}{r} y \frac{dR}{dr},$$

d'où

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{y r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + k^2 = 0$$

ou

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 + \frac{1}{y \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) = 0,$$

ce qui équivaut, v étant une constante, arbitraire a priori, à

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = v \quad \text{et} \quad \frac{1}{y \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) = -v.$$

Ces équations sont classiques. La seconde, qui s'écrit

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + \cotg \theta \frac{dy}{d\theta} + \nu y = 0$$

entraîne que ν est de la forme $j(j + 1)$ avec j entier, les solutions étant les polynômes de Legendre $P_j^m(\cos \theta)$ avec $m = 0, 1, 2, \dots, j$. L'équation "radiale" s'écrit alors

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{j(j + 1)}{r^2} \right] R = 0$$

et sa solution est bien connue.

En tenant compte de la gravité, l'équation (4) devient, en ajoutant $\rho g(z - z_1)$ au premier membre,

$$A\Delta\zeta + \left(\frac{\epsilon V^2}{z_1^3} - \rho g \right) \zeta = \rho gh.$$

La discussion précédente subsiste, mais ici on a

$$k^2 = \frac{\epsilon V^2}{Az_1^3} - \frac{\rho g}{A},$$

d'où une nouvelle longueur d'onde.

5 ETUDE DES DEFORMATIONS DE FORTE AMPLITUDE

On peut envisager avec l'équation (1) des déformations de forte amplitude à condition que la normale à la surface ne s'écarte pas trop de la verticale. On peut en particulier considérer le cas où z_1 est très petit. En posant $z = z_1 + Z$, avec $z_1 \ll Z$, l'équation

$$\frac{1}{2} \epsilon V^2 \left[\frac{1}{(z_1 + Z)^2} - \frac{1}{z_1^2} \right] = A\Delta Z$$

s'écrit sensiblement, en dehors de la zone pour laquelle z est voisin de z_1 ou inférieur,

$$\frac{1}{2} \frac{\epsilon V^2}{z_1^2} = -A\Delta Z = A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

ce qui est une équation de Poisson.

On voit que la surface a une courbure totale constante. Dans le cas particulier où $R_1 = R_2 = R$, la surface est sphérique, avec

$$R = \frac{4Az_1^2}{\epsilon V^2}.$$

C'est le résultat déjà signalé². Au total, dans la mesure où la zone pour laquelle on n'a pas $Z \gg z_1$ est peu étendue, l'ensemble de la surface est formé de petites portions de sphères se raccordant dans des régions où la concavité est dans l'autre sens (régions "convexes"): c'est la déformation "cellulaire". La condition $R_1 = R_2$ est normale s'il n'y a pas de direction horizontale privilégiée, mais elle n'est pas obligatoire.

En tenant compte de la gravité, on a ici l'équation approchée

$$-\frac{1}{2} \frac{\epsilon V^2}{z_1^2} + \rho g Z = A \Delta Z.$$

La solution se présente sous la forme d'une superposition de deux solutions des types précédents (onde stationnaire sinusoidale + structure cellulaire).

On peut calculer approximativement le diamètre d des calottes sphériques en tenant compte de ce que, dans l'approximation actuelle, $e \ll d$ (fig. 1). On a sensiblement $d^2 = 8Re$; par ailleurs, le volume d'une "lentille" (segment de sphère) est égal à $\pi R e^2$. On trouve alors $e = 2h$, d'où

$$d = 4\sqrt{hR} = 8 \sqrt{\frac{Ah}{\epsilon} \frac{z_1}{V}} \quad (5)$$

Lorsque d cesse d'être grand par rapport à h , l'approximation précédente cesse d'être valable. Le volume d'une lentille s'écrit alors

$$\frac{\pi}{6} e \left(\frac{3d^2}{4} + e^2 \right)$$

ou encore

$$\frac{\pi e^2}{3} (3R - e)$$

et c'est cette quantité qui est égale à

$$\frac{\pi d^2}{4} h.$$

On en tire

$$2d^2 h = ed^2 + \frac{4}{3} e^3$$

soit

$$d^2 = \frac{\frac{4}{3} e^3}{2h - e}$$

Et il est intéressant de considérer le cas limite de lentilles hémisphériques jointives. On a alors, avec $d = 2R$, $e = R$, $e = \frac{1}{2}h$, $d = 3h$, $d = 2e$. Mais l'équation différentielle initiale s'applique mal.

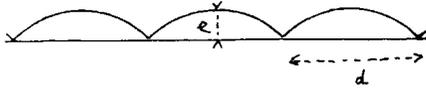


FIGURE 1 Déformation cellulaire à une dimension.

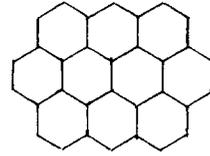


FIGURE 2 Surface déformée avec structure hexagonale.

La période spatiale est en principe un peu supérieure à d , à cause des régions convexes. Mais il faut bien voir que ce qui précède est approximatif. On ne peut pas en effet raisonner comme si des calottes sphériques pouvaient être jointives; ce n'est pas le cas; il subsiste des zones intermédiaires. Par ailleurs les calottes sphériques peuvent être légèrement tronquées, donnant une structure cellulaire plus compacte. La structure hexagonale de la figure 2 est couramment obtenue dans le cas d'une grande étendue de liquide et ceci modifie la période spatiale. Il faut d'autre part noter qu'un point où la courbure totale est nulle n'est pas un point d'inflexion d'une section verticale, et en particulier la situation n'est pas la même alors près d'une arête et près du sommet d'un hexagone. Vers une arête on se rapproche d'un problème à une dimension.

Analysons précisément le problème à une dimension (on considère que z est indépendant de y). On a alors

$$R = \frac{2az_1^2}{\epsilon V^2}.$$

D'autre part on a toujours $d^2 = 8Re$, tandis que le volume d'un segment de profondeur unité, dont la section circulaire est vue du centre du cercle sous l'angle φ , est $\frac{1}{2}R^2(\varphi - \sin \varphi)$. En supposant φ très petit, on a $\varphi = \frac{d}{R}$ et le volume est sensiblement

$$\frac{1}{2}R^2 \frac{\varphi^3}{6} = \frac{1}{12} \frac{d^3}{R},$$

ce qui s'écrit aussi $\frac{1}{3}ed$ et doit être égal à hd ; d'où

$$e = \frac{3}{2}h$$

et

$$d = 2\sqrt{3}\sqrt{Rh} = 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{Ah}{\epsilon} \frac{z_1}{V}}.$$

La période spatiale est une peu plus grande à cause de la région convexe.

Pour préciser cette région, notons que la partie pour laquelle $Z \ll z_1$ correspond à l'équation

$$\frac{1}{2} \frac{\epsilon V^2}{z_1^2} \left(-\frac{2Z}{z_1} \right) = A \Delta Z$$

ou

$$A \Delta Z + \frac{\epsilon V^2}{z_1^3} Z = 0,$$

ce qui est l'équation (4). La longueur d'onde associée, si on raisonne sur le problème à une dimension, est

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{A}{\epsilon} \frac{z_1^{3/2}}{V}}.$$

C'est beaucoup plus faible que le diamètre d donné par (5) et, de toutes façons, seule une fraction de λ est concernée.

6 AUTRES CARACTERISTIQUES DE LA DEFORMATION

On peut préciser encore quelques points en notant que, puisque x et y ne figurent pas directement dans la fonction I considérée au § 2, le calcul des variations conduit à

$$I - z'_x \frac{\partial I}{\partial z'_x} - z'_y \frac{\partial I}{\partial z'_y} = T,$$

où T est une constante, ce qui donne, avec les approximations déjà introduites

$$A \left[1 - \frac{1}{2}(z_x'^2 + z_y'^2) \right] - \frac{\epsilon V^2}{2z} - \mu z = T \quad (6)$$

Pour les déformations de faible amplitude, en négligeant $z_x'^2$ et $z_y'^2$ devant l'unité, on a sensiblement

$$A - \frac{\epsilon V^2}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{z_1^2} \right) = T \quad (7)$$

et, puisque z et z_1 restent voisins de h , il vient $T = A - \frac{\epsilon V^2}{h}$. T peut être considéré comme la tension superficielle généralisée tenant compte de l'état électrique: T diminue à partir de A quand V croît à partir de zéro.

Pour la valeur particulière

$$V_0 = \sqrt{\frac{Ah}{\epsilon}} \quad \text{ou} \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{A\epsilon}{h}},$$

T devient nul. Très certainement ceci correspond à une frontière entre deux types de déformations, mais les déformations étudiées au § 4, pour lesquelles

$$v \ll \sqrt{\frac{Ah}{\epsilon}},$$

correspondent à $T > 0$. Pour T négatif, la surface tend à se plisser beaucoup plus et on peut avoir de fortes inclinaisons locales de la surface libre.

Pour les déformations de forte amplitude, avec encore z'_x et z'_y partout assez faibles, on aura par contre sensiblement, pour $z \gg z_i$, $T = A - \mu z$ soit

$$T = A - \frac{\epsilon V^2}{2z_i^2} z.$$

Ceci n'est vrai en toute rigueur que près du sommet des lentilles; leur hauteur e est donc telle que

$$T = A - \frac{\epsilon V^2}{2z_i^2} e;$$

pour $e = 2h$, il vient

$$T = A - \frac{\epsilon V^2 h}{z_i^2} \tag{8}$$

ou

$$z_i = \sqrt{\frac{\epsilon h}{A - T}} V.$$

La relation (7) est de toutes façons valable pour les extremums de la surface libre. Sous la forme $2\mu z^2 + 2(T - A)z + \epsilon V^2 = 0$, elle donne les deux extremums par la résolution d'une équation du second degré. Le discriminant réduit de l'équation est $\Delta' = (T - A)^2 - 2\mu\epsilon V^2$, la demi-somme des racines est

$$\frac{z_M + z_m}{2} = \frac{A - T}{2\mu} = \frac{(A - T)z_i^2}{\epsilon V^2},$$

leur différence

$$\frac{\sqrt{\Delta'}}{\mu},$$

leur produit

$$z_M z_m = \frac{\epsilon V^2}{2\mu} = z_1^2.$$

Ce dernier résultat est intéressant par sa simplicité. Avec $z_M = 2h$, on en tire

$$z_m = \frac{z_1^2}{2h}.$$

Lorsqu'on introduit la gravité, on a vu que la relation (1) est remplacée par

$$\frac{\epsilon V^2}{2z^2} - \mu + \rho g z = A \Delta z.$$

La relation (7) est elle-même remplacée par

$$A + \frac{1}{2} \rho g z^2 - \frac{\epsilon V^2}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{z_1^2} \right) = T.$$

On voit que la gravité peut être considérée comme augmentant la tension superficielle (elle tend également à maintenir la surface plane). Et il est intéressant de calculer la moyenne \bar{z}^2 de z^2 dans les cas typiques.

Prenons d'abord le cas d'une déformation de forte amplitude avec $e \ll d$. A une distance horizontale r de l'axe d'une lentille, on a

$$r^2 = (e - z) 2R \quad \text{d'où} \quad z = e - \frac{r^2}{2R}.$$

Or, en intégrant sur une lentille (c'est-à-dire en négligeant l'intervalle entre les lentilles), on peut écrire

$$\bar{z}^2 = \frac{1}{\pi d^2/4} \int_0^{d/2} 2\pi z^2 r \, dr.$$

En utilisant l'expression précédente de z , l'intégration conduit à

$$\bar{z}^2 = \frac{8}{d^2} \left[e^2 \frac{d^2}{8} - \frac{e}{4R} \frac{d^4}{16} + \frac{1}{24R^2} \frac{d^6}{64} \right].$$

En ne conservant que le dernier terme, le plus important, puis en introduisant h par $d = 4\sqrt{hR}$, on trouve finalement $\bar{z}^2 = \frac{3}{8}h^2$. Pour des lentilles hémisphériques, le calcul conduit à

$$\bar{z}^2 = \frac{\pi R^2}{2},$$

ce qui donne, pour $R = \frac{3}{8}h$, $\bar{z}^2 = \frac{3}{8}h^2$.

7 MODES DE DEFORMATION

Revenons à l'équation initiale (1). Une solution mathématique est caractérisée par une valeur du paramètre μ et deux conditions aux limites. Quelle est alors la déformation obtenue dans le cas d'un liquide donné (ϵ et A fixés), pris sous une épaisseur au repos donnée h et soumis à une différence de potentiel V donnée. μ est déterminé par la condition que la moyenne de z soit h , ce qui impose alors aussi z_1 en vertu de la relation

$$\mu = \frac{\epsilon V^2}{2z_1^2}.$$

On a donc une déformation bien déterminée.

En fait, la déformation étant périodique, il y a plusieurs solutions pour μ et par suite pour z_1 , respectant les conditions aux limites; nous disons que plusieurs "modes" peuvent coexister et se combiner. Mais, quand ils se combinent, ils s'attèrent mutuellement, car l'équation n'est pas linéaire et il n'y a pas séparation en modes indépendant et superposables.

Pratiquement, on a souvent affaire à des surfaces relativement étendues vis-à-vis des périodes spatiales envisageables et les conditions aux limites ont assez peu d'influence, la mobilité du liquide permettant toujours des ajustements sur les bords. C'est pourquoi, dans la pratique, on peut souvent dire que, pour V donné, z_1 peut a priori prendre toute valeur et par superposition on est finalement conduit à une multitude de possibilités. On peut même penser qu'il n'en résultera aucune déformation nette en moyenne ou tout au moins aucune déformation stable.

Toutefois on peut essayer de voir si certains modes ne pourraient pas s'établir préférentiellement. Voici quelques considérations à ce sujet. Tout d'abord notons que la déformation crée une redistribution des charges sur la surface. Dans le cas où elles arrivent uniformément, il est normal que soient privilégiés les modes qui conduisent à des déplacements latéraux de charges de faible amplitude, c'est-à-dire les déformations de forte amplitude avec d faible, bien qu'en contrepartie ceci conduise à de fortes variations de la densité superficielle de charges d'un point à l'autre; la conductivité de surface est concernée.

D'autre part la gravité tend à imposer une moyenne de z^2 aussi faible que possible. Mais les calculs ont montré qu'elle n'est pas très différente pour les différents modes. C'est pourquoi on peut penser que l'on tend à avoir une tension superficielle généralisée aussi faible que possible par l'établissement d'une déformation de forte amplitude avec z_1 très petit et d faible. Ceci pourrait aller jusqu'à la formation de gouttes quasi-sphériques sur un fond liquide de faible épaisseur.

Du point de vue pratique, il faut noter aussi que la contrainte de volume n'est pas toujours respectée localement; le liquide peut être chassé vers les bords par le jeu des forces de répulsions électrostatiques.

8 ÉTABLISSEMENT DE LA DÉFORMATION

Supposons que l'on parte du repos et que l'on apporte rapidement des charges. On peut d'abord admettre qu'il y a un seuil pour la déformation, si on note que la tension superficielle et la gravité s'y opposent. Par exemple le seuil pourrait correspondre à une tension superficielle généralisée nulle. Ceci, pour une surface peu déformée, correspond à

$$V = V_0 = \sqrt{\frac{Ah}{\epsilon}}$$

Mais en fait la déformation s'établit sur une surface non idéale, en ce sens qu'il y a des fluctuations dans l'espace et dans le temps pour l'arrivée des charges et d'autre part des fluctuations de la surface libre plus ou moins provoquées par le passage du courant. Ainsi la déformation peut se manifester dès les faibles tensions (ou les faibles charges).

On pourrait même à la limite admettre que la formule (8) s'applique toujours avec $T = 0$; il y aurait alors un ajustement pour chaque tension de la forme de la surface de façon que T soit toujours nul. Alors z , augmente avec V suivant la loi

$$z_1 = \sqrt{\frac{\epsilon h}{A}}$$

et, lorsque V devient assez grand, on en viendrait au domaine des déformations de faible amplitude. La formule approchée de a conduit alors au début à $d = 8h$, ce qui est indépendant de V et de la nature du liquide. Mais ceci ne paraît pas conforme l'expérience.

C'est qu'il y a un autre aspect fondamental concernant l'établissement de la déformation sous un apport régulier de charges. Il faut tenir compte des pertes du liquide. Les charges tendent à s'écouler et ça se traduit par des forces mettant en mouvement le liquide lui-même; elles interviennent largement dans l'amorçage des déformations. Des creux et des bosses commencent ainsi à se former de façon plus ou moins régulière, compte tenu des conditions de l'arrivée des charges, et progressivement pourra s'établir la déformation statique idéale décrite précédemment, avec un ajustement de V par les fuites pour chaque déformation.

Mais il faut noter que la déformation régulière peut très bien ne pas apparaître. En effet la déformation initiale peu régulière tend à se stabiliser d'elle-même. Considérons par exemple une zone qui commence à se charger

de façon relativement importante; elle tend à prendre une forme sphérique avec production d'une surépaisseur qui limite les pertes, donc tend à renforcer, puis à maintenir, la déformation; le fait que la conductivité de l'isolant n'est pas linéaire renforce ce mécanisme. En définitive les pertes du liquide ne seront pas les mêmes partout et il en résultera même couramment une variation de V sur la surface, V tendant à diminuer là où l'épaisseur est la plus faible. Alors des déformations sphériques de diamètres variés (correspondant à des V différents) se manifestent sur la surface et peuvent évoluer. Entre les calottes sphériques, le fond, plus mince, serait à un potentiel beaucoup plus faible, compte tenu des pertes, ce qui découple les diverses cellules qui peuvent être séparées par une couche mince non déformée.

Il faut aussi prendre en considération le fait que l'établissement de la déformation est un problème dynamique dans lequel la viscosité du liquide joue un rôle important. Elle tend à éliminer les modes dont l'établissement serait trop contrecarré par les forces de viscosité mises en jeu, les modes établis les premiers empêchant ensuite les autres de se développer. Ceci gêne en particulier les modes de faible période.

Enfin il faut noter que les mouvements de liquide envisagés plus haut sont susceptibles de donner naissance à un autre type de déformation, dans lequel des tourbillons créés dans le liquide seraient à l'origine d'une déformation périodique. On aurait alors un problème continuellement dynamique largement contrôlé par la viscosité.

En définitive, si les phénomènes de base sont les mêmes pour tous les liquides isolants, des comportements extrêmement variés peuvent se manifester suivant les cas; avec combinaison de tourbillons "électroconvectifs" et d'une déformation de type "statique".

Références

1. Cf. par exemple, A. Watanabe, *Jap. J. of Appl. Phys.*, **12**, 1973, 593; D. S. Parmar et A. K. Jalaluddin, *Jap. J. of Appl. Phys.*, **13**, 1974, 793.
2. G. Sabra, J. Fornazéro et G. Mesnard, *Phys. and Chemistry of Liquids*, **5**, 125 (1976).